数形结合在高中数学中的应用

■广东省广州市第四中学　刘　鑫

数形结合就是通过数与形之间的对应和转化来解决数学问题，它包含以形助数和以数解形两个方面.利用它可使复杂问题简单化，抽象问题具体化，它兼有数的严谨与形的直观之长，是优化解题过程的重要途径之一，是一种基本的数学思想方法.数形结合的实质就是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，使抽象思维和形象思维结合起来，在解决代数问题时，想到它的图形，从而启发思维，找到解题之路；或者在研究图形时，利用代数的性质，解决几何的问题.实现抽象概念与具体形象的联系和转化，化难为易，化抽象为直观.纵观多年来的高考试题，巧妙运用数形结合的思想方法解决一些抽象的数学问题，可起到事半功倍的效果，数形结合的重点是研究“以形助数”.

一、利用数形结合的思想解决集合问题

在集合运算中常常借助于数轴、Venn 图来处理集合的交、并、补等运算，从而使问题得以简化，使运算快捷明了.

例 1. 如图 1，是全集，M，P，S 是的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是（　）

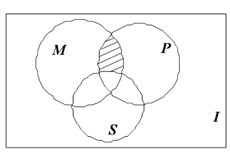

图 1

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap C_IS$

D. $(M\cap P)\cup C_IS$

解析： 由 Venn 图知，图中阴影部分表示的集合是 $M\cap P$ 的子集且是 C_IS 的子集，故答案为 C.

点评： Venn 图作为集合的第三种表示方法，往往易被考生忽略，如果多用 Venn 图来处理集合的交、并、补等运算，就会感受到问题一旦形象化了，运算会很方便.

例 2. 设集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\mid 2x-3>0\}$，则 $A\cap B$（　）

A. $(-3, -\frac{3}{2})$　　B. $(-3, \frac{3}{2})$

C. $(1, \frac{3}{2})$　　D. $(\frac{3}{2}, 3)$

解析： 因为 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}=\{x\mid 1<x<3\}$，$B=\{x\mid 2x-3>0\}=\{x\mid x>\frac{3}{2}\}$，如图 2，所以 $A\cap B=(\frac{3}{2},3)$.

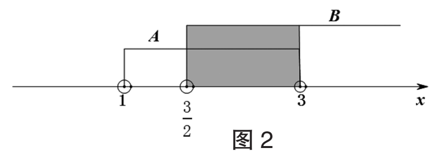

图 2

故选 D.

点评： 集合是每年高考中的必考题，一般以基础题形式出现，属得分题.解决此类问题一般要把参与运算的集合化为最简形式再进行运算，如果是不等式解集、函数定义域及值域有关数集之间的运算，常借助数轴进行运算.

二、利用数形结合的思想解决函数问题

函数的图像及性质常常是解决问题的突破口，函数的图像是函数解析式的“形”的表象，它以图形的方式来刻划函数中变量之间的变化关系.通过函数的图像研究函数的性质，是中学阶段学习函数理论的重要方法，既有助于理解和记忆函数的性质，也有助于应用函数的性质分析问题和解决问题.

例 3. 用 $\min\{a,b,c\}$表示 a,b,c 三个数中的最小值，设 $f(x)=\min\{2^x,x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$，则 $f(x)$ 的最大值为（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解析： 画出 $y=2^x$，$y=x+2$，$y=10-x$ 的图像，如图 3，观察图像可知，当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=2^x$；当 $2\leqslant x<3$ 时，$f(x)=x+2$；当 $x>4$ 时，$f(x)=10-x$. $f(x)$ 的最大值在 $x=4$ 时取得为 6，故选 C.

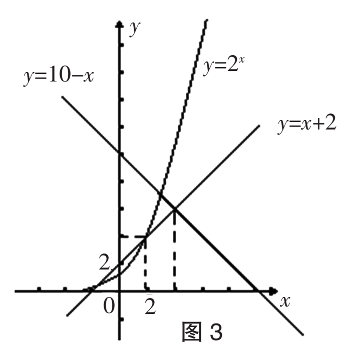

图 3

点评： 本题若直接入手比较困难，但转化为图形，则可直接观察得出结果.

例 4. 直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点，则 a 的取值范围是__________.

解析： 如图 4，在同一直角坐标系内画出直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$，观图可知，a 的取值必须满足 $\begin{cases} a>1, \\ \frac{4a-1}{4}<1, \end{cases}$ 解得1<